

Задача 5.5(б)

Смирнова Эльза, 307 группа

Условие задачи

5.5. (2) Количественно исследовать влияние формы импульса $\xi(t)$ на ширину спектра $S(\nu)$. За длительность импульса принять интервал, равный длительности эквивалентного прямоугольного импульса:

$$\Delta t = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi(t)|^2 dt / (\max |\xi(t)|)^2 .$$
 За ширину спектра принять полосу частот,

$$\Delta \nu = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\nu)|^2 d\nu / (\max |S(\nu)|)^2 .$$
 Исходя из

принятых определений, найти величину численного коэффициента C в теореме о ширине частотной полосы: $\Delta t \Delta \nu = C$. Изобразить графически сигналы $\xi(t)$ в зависимости от τ и их спектры $S(\nu)$ в зависимости от частоты ν , взятой в единицах, пропорциональных τ^{-1} . Решение некоторых вариантов задачи возможно аналитически, но, как правило, рекомендуется воспользоваться компьютером для вычисления дискретных спектров.

Получить и сравнить результаты для следующих импульсов.

Вариант (б)

$$\text{прямоугольный импульс } \xi(t) = \begin{cases} a, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases} ,$$

$$\text{"косинусоидальный" импульс } \xi(t) = \begin{cases} a \cos(\pi t/\tau), & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases} ,$$

$$\text{гауссов импульс } \xi(t) = a \exp(-t^2/\tau^2) .$$

Прямоугольный импульс

$$\xi(t) = \begin{cases} a, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

- Для данного импульса $\Delta t = \tau$

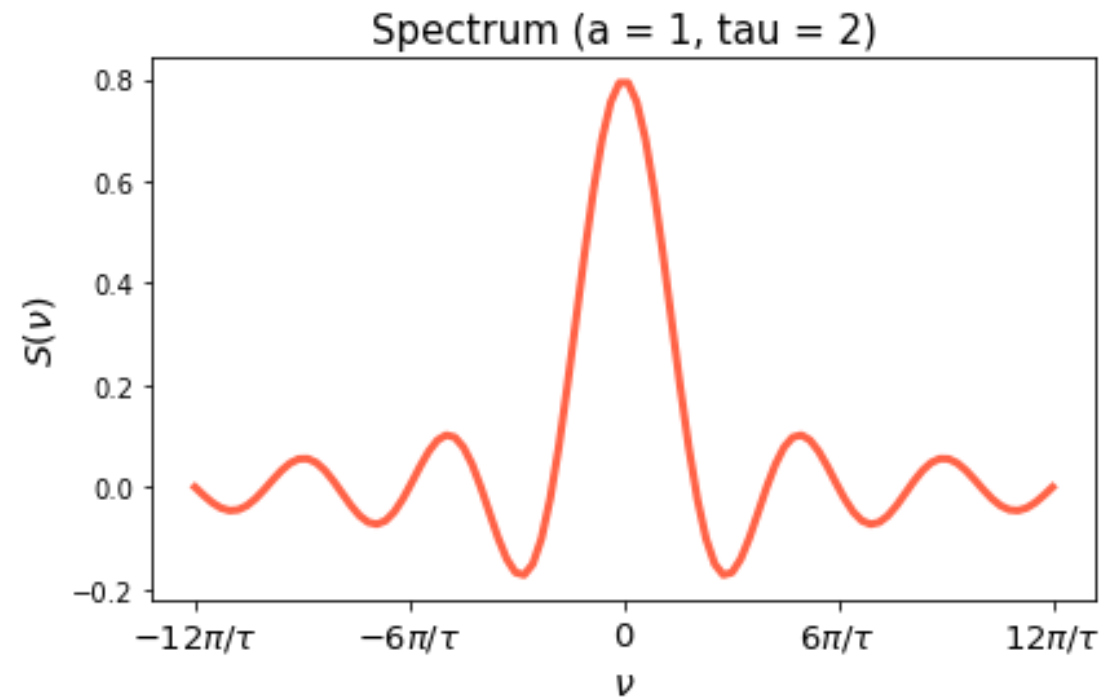
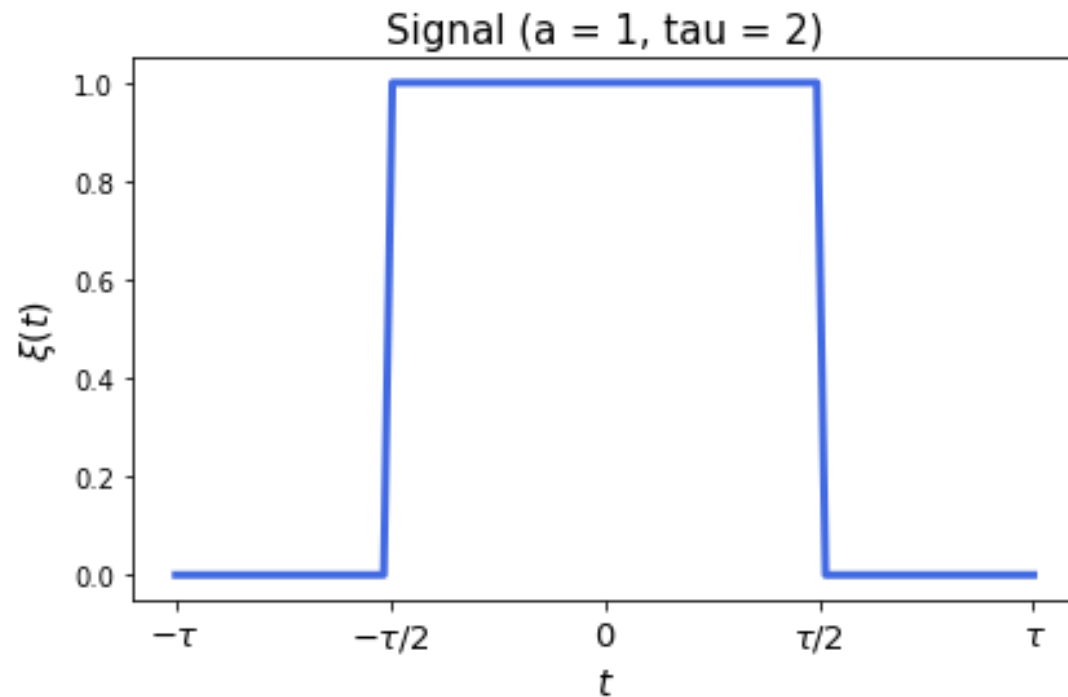
$$\begin{aligned} \bullet S(\nu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{i\nu t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i\nu t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\nu \frac{\tau}{2}} - e^{-i\nu \frac{\tau}{2}}}{i\nu} = \\ &= \frac{a\tau}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\nu \frac{\tau}{2})}{\nu \frac{\tau}{2}} \end{aligned}$$

- Значит, $\max |S(\nu)| = \frac{a\tau}{\sqrt{2\pi}}$

Прямоугольный импульс

- $\int_{-\infty}^{+\infty} |S(\nu)|^2 d\nu = \frac{a^2 \tau^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\nu \frac{\tau}{2})}{\nu \frac{\tau}{2}} \right)^2 d\nu =$
- Так как $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \pi$, то
- $= \frac{a^2 \tau}{\pi} \pi = a^2 \tau$
- Теперь можем посчитать ширину спектра
- $\Delta\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\nu)|^2 d\nu / (\max |S(\nu)|)^2 = a^2 \tau / \left(\frac{a\tau}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 = \frac{2\pi}{\tau}$
- Тогда искомый коэффициент $C = \Delta t \Delta\nu = 2\pi$

Графики прямоугольного импульса и его спектра



«Косинусоидальный» импульс

$$\xi(t) = \begin{cases} a \cos(\pi t / \tau), & |t| < \tau / 2 \\ 0, & |t| > \tau / 2 \end{cases}$$

$$\bullet S(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{i\nu t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) e^{i\nu t} dt =$$
$$\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\pi\tau \cos(\nu \frac{\tau}{2})}{\pi^2 - \nu^2 \tau^2}$$

$$\bullet \text{Значит, } \max|S(\nu)| = \frac{a\sqrt{2\pi}}{\pi^2} \tau \text{ и } (\max|S(\nu)|)^2 = \frac{2a^2\tau^2}{\pi^3}$$

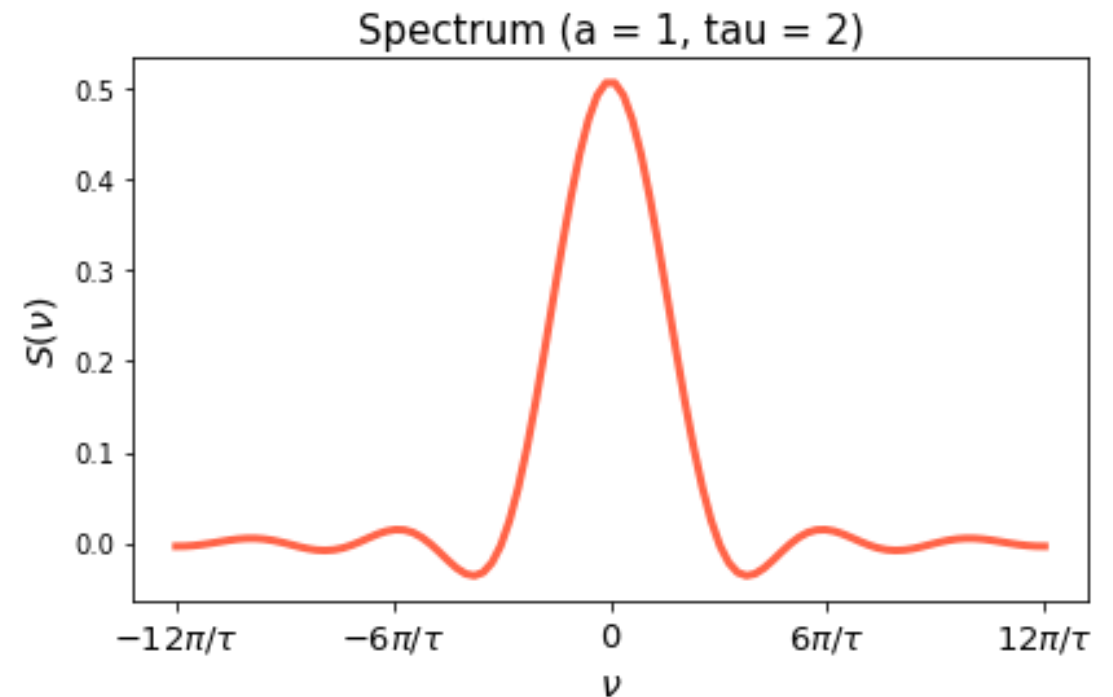
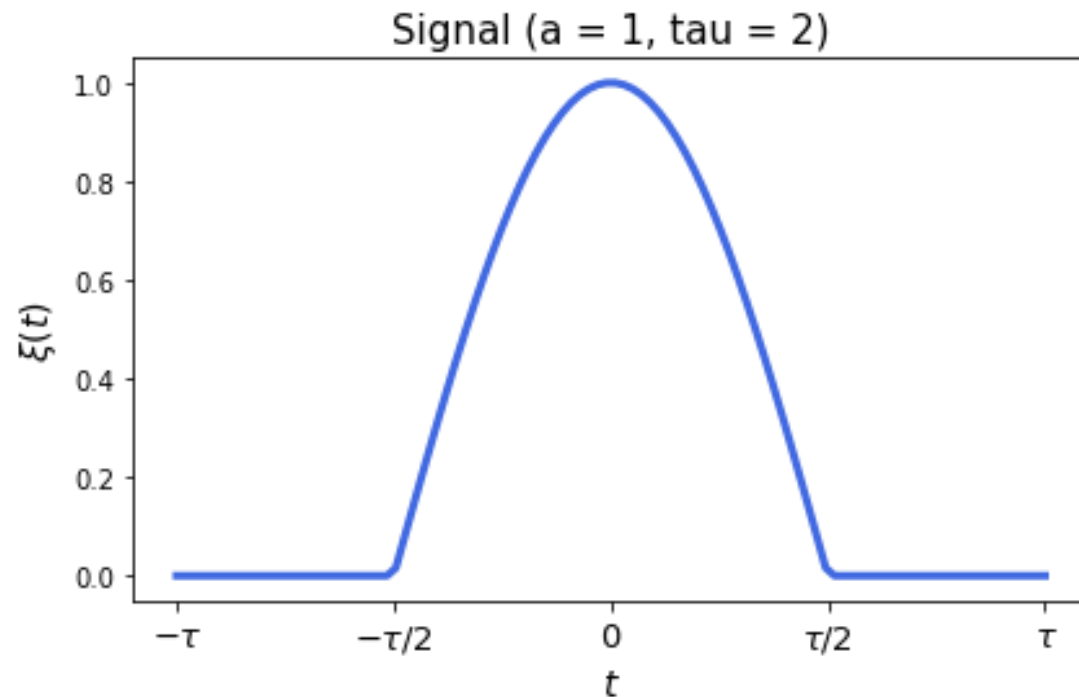
$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\nu)|^2 d\nu = 2\pi a^2 \tau^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\cos(\nu \frac{\tau}{2})}{\pi^2 - \nu^2 \tau^2} \right)^2 d\nu =$$

$$\bullet \text{Делаем замену переменных: } p = \nu \frac{\tau}{2}, dp = \frac{\tau}{2} d\nu$$

«Косинусоидальный» импульс

- $\int_{-\infty}^{+\infty} |S(\nu)|^2 d\nu = \frac{\pi a^2 \tau}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\cos p}{\frac{\pi^2}{4} - p^2} \right)^2 dp \approx \frac{\pi a^2 \tau}{4} \cdot 0,318$
- Теперь можем посчитать ширину спектра
- $\Delta\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\nu)|^2 d\nu / (\max |S(\nu)|)^2 = \frac{\pi a^2 \tau}{4} \cdot 0,318 / \frac{2a^2 \tau^2}{\pi^3} = \frac{\pi^4 \cdot 0,318}{8\tau}$
- $\Delta t = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \left(\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \right)^2 dt = \frac{\tau}{2}$
- Тогда искомый коэффициент $C = \Delta t \Delta\nu = \frac{\pi^4 \cdot 0,318}{16} \approx 1,936$

Графики «косинусоидального» импульса и его спектра



Гауссов импульс

$$\xi(t) = a \exp(-t^2/\tau^2)$$

- $\Delta t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2/\tau^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tau$

- $S(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{i\nu t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/\tau^2 + i\nu t} dt = \frac{a\tau}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\nu^2 \tau^2}{4}}$

- Значит, $\max |S(\nu)| = \frac{a\tau}{\sqrt{2}}$

- $\Delta \nu = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\nu)|^2 d\nu / (\max |S(\nu)|)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\nu^2 \tau^2}{2}} d\nu = \frac{\sqrt{2\pi}}{\tau}$

- Тогда искомый коэффициент $C = \Delta t \Delta \nu = \pi$

Графики гауссова импульса и его спектра

